

STATISTIČNA OBDELAVA IN PRIMERJAVA ŠTEVILA DNI S SNEŽNO ODEJO S SREDNJIMI ZIMSKIMI TEMPERATURAMI ZA LJUBLJANO V OBDOBJU 1895 - 1976

STATISTICAL TREATMENT AND COMPARISON BETWEEN THE NUMBER OF DAYS WITH SNOW COVER AND MEAN TEMPERATURES IN LJUBLJANA FOR THE PERIOD BETWEEN 1895 - 1976

551.506.3  
551.524.33  
551.578.43

BRANKO WEISSBACHER

Meteorološki zavod SRS, Ljubljana

SUMMARY

In this article we have treated statistically mean winter temperatures and days with snow cover in Ljubljana for the period of 81 years, and determined the correlation between both variables. As the data for days with snow cover were available only for 74 years, we have calculated - by using the regression equation - the number of days with snow cover also for the period of the seven years without data, and have included them in order to complete the period of 81 years. The correlation between both variables is -0.74, which is rather a high value. With the help of a computer we have obtained several other statistical quantities. We have also obtained the frequency histogram and normal frequency histogram for both variables, with the arithmetical mean and variance being equal.

POVZETEK

V tem članku smo statistično obdelali poprečne zimske temperature in dneve s snežno odejo v Ljubljani za 81 let in poiskali korelacijo med obema spremenljivkama. Iz regresijske enačbe smo izračunali manjkajoče podatke za dneve s snežno odejo za 7 let. Izračunali smo še nekatere druge statistične količine in izdelali frekvenčne histograme naravne in normalne porazdelitve obeh spremenljivk.

## UVOD

Zimske temperature v Sloveniji je proučevalo že več avtorjev /1,2/ in prav tako snežno odejo /3/. V tem prispevku smo primerjali število dni s snežno odejo v Ljubljani s poprečnimi zimskimi temperaturami od leta 1895 do 1976 /4/. Iz regresijske enačbe smo izračunali, in s tem izpopolnili, manjkajoče podatke za snežno odejo za 7 let. Za tako izpopolnjen niz podatkov smo izračunali nekatere statistične parametre in izdelali frekvenčne histograme za obe spremenljivki.

## PODATKI IN METODA

Podatke o snežni odeji v Ljubljani imamo od leta 1895. Na sliki 1 so vrisane poprečne zimske temperature t.j. srednje temperature, izračunane iz srednjih mesečnih temperatur zimskih mesecev decembra, januarja in februarja. Na sliki 2 pa je število dni s snežno odejo v Ljubljani od leta 1895 v vsaki meteorološki zimi, se pravi v mesecih december, januar in februar. Vendar pa niz podatkov za dneve s snežno odejo ni sklenjen. Manjkajo namreč podatki za januar 1898 in za šest zim od leta 1923 do leta 1929.

S programom DSTAT 2 /6/ smo na računalniku CYBER izračunali za poprečne zimske temperature in dneve s snežno odejo matriko korelacije, matriko kovariance in enostavno statistiko za vsako spremenljivko: vsoto vseh vrednosti, poprečje, standardno deviacijo ter najmanjšo in največjo vrednost.

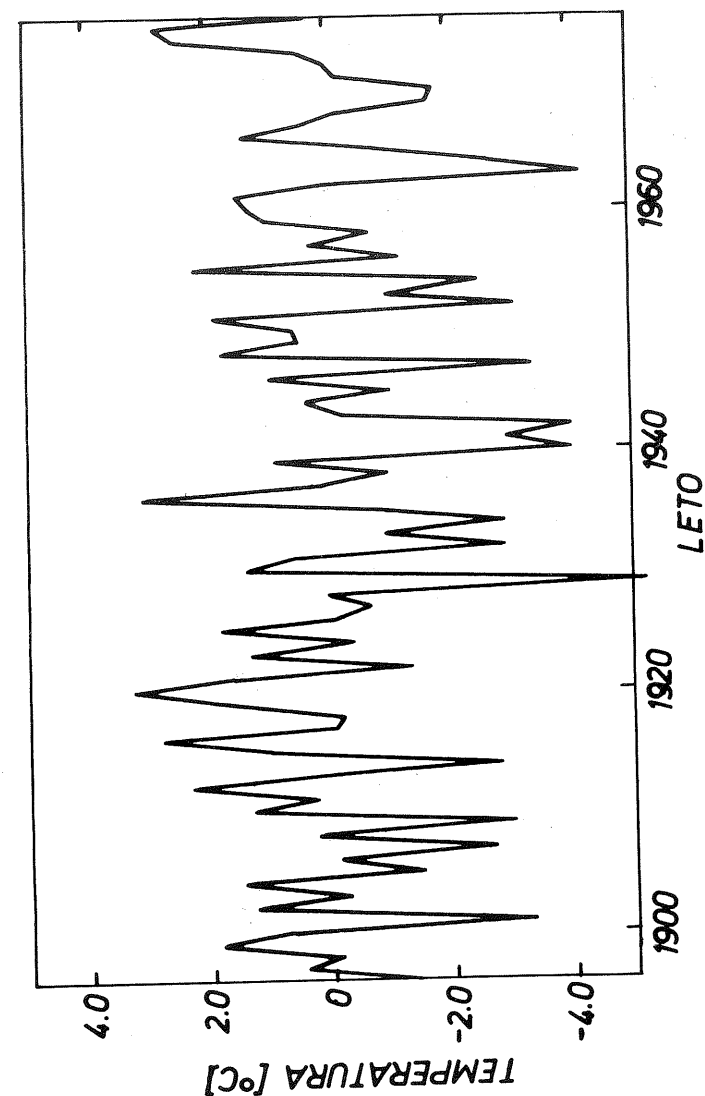
Poglejmo si obe matriki in v tabeli 1 osnovne statistične količine:

Matrika kovariance:

T	T	N		T	N
T	$\sigma_T^2$		ali	T	3,46
N	$\mu_{11}$	$\sigma_N^2$		N	-29,1

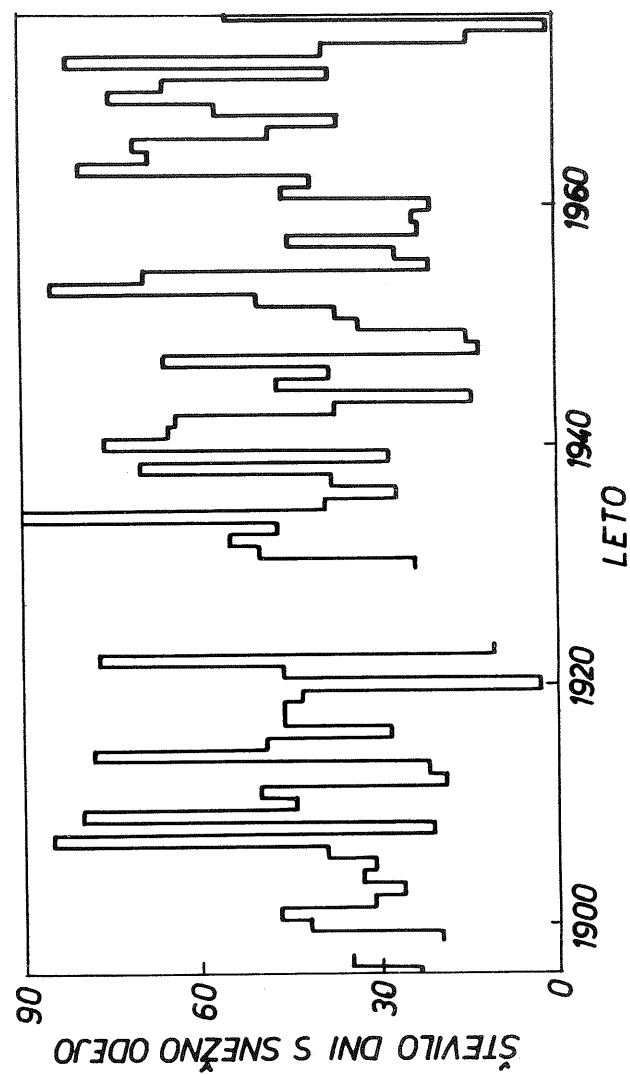
kjer pomenijo:

T - poprečna zimska temperatura	$\sigma_N^2$ - varianca spremenljivke N
N - število dni s snežno odejo	$\mu_{11}$ - kovarianca
$\sigma_T^2$ - varianca spremenljivke T	



Slika 1 Poprečne zimske temperature v Ljubljani od 1895/96 do 1975/76.

Fig. 1 Mean winter temperatures in Ljubljana for the period between 1895/96 - 1975/76.



Slika 2 Število dni s snežno odejo v zimskih mesecih december, januar in februar od 1895/96 do 1975/76.

Fig. 2 Number of days with snow cover in winter months December, January and February from 1895/96 - 1975/76.

Tabela 1 Osnovne statistične količine poprečnih zimskih temperatur (T) in števila dni s snežno odejo (N) za 74 let.

Table 1 Basic statistical quantities of mean winter temperatures (T) and the number of days with snow cover (N) for the period of 74 years.

	vsota	poprečje	standardna deviacija	varianca	minimum	maximum
T	-12,8	-0,2	1,86	3,46	-4,2	3,3
N	3 235	43,7	21,68	469,80	1	90

Matrika korelacije

	T	N
T	1,00	
N	-0,72	1,00

Koeficient korelacije  $r$  je  $-0,72$ , torej je korelacija med obema spremenljivkama precej dobra.

Enačbi za regresijski premici imata naslednjo obliko (4):

$$1. \quad N - \bar{N} = \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_T^2} (T - \bar{T})$$

$$2. \quad N - \bar{N} = \frac{\sigma_N^2}{\sigma_{11}^2} (T - \bar{T})$$

Iz matrike kovariance dobimo vrednosti za  $\sigma_T^2$ ,  $\sigma_N^2$  in  $\sigma_{11}^2$ , iz tabele 1 pa še poprečne vrednosti  $\bar{T}$  in  $\bar{N}$ , ter jih vstavimo v prvo enačbo, iz katere dobimo število dni s snežno odejo (N) v odvisnosti od poprečne zimske temperature (T). Ker za vsako spremenljivko T ne dobimo točno določenih N, med obema spremenljivkama ni funkcionalne povezave, ampak t.im. stohastična. Druga enačba daje povezavo spremenljivke T v odvisnosti od N. Funkciji med seboj nista inverzni in lahko kot  $\gamma$  med obema regresijskima premicama izračunamo iz naslednje formule:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1 - r^2}{r} \cdot \frac{\sigma_T \sigma_N}{\sigma_T^2 + \sigma_N^2} \quad \text{in je za naš primer } 3^\circ 15'.$$

Iz prve enačbe dobimo tako najbolj verjetno število dni s snežno odejo, ki pripada poprečnim zimskim temperaturam za tistih sedem let, za katera podatki o snežni odeji manjkajo (tabela 2).

Tabela 2 Dnevi s snežno odejo za leta, za katera ni izmerjenih podatkov, izračunani iz enačbe za regresijsko premico.

Table 2 Days of snow cover for years without measured data, obtained by using the equation for linear regression.

Leto	T	N
1897/98	-0,1	43
1923/24	-0,4	46
1924/25	1,8	27
1925/26	-0,1	43
1926/27	-0,7	48
1927/28	0,0	42
1928/29	-5,2	88

S temi vrednostmi smo dobili niz nepretrganih podatkov za dneve s snežno odejo za 81 let. Oba niza podatkov smo ponovno statistično obdelali.

Poglejmo si matriko korelacije in v tabeli 3 nove osnovne statistične količine:

Matrika korelacije

	T	N
T	1,00	
N	-0,74	1,00

Tabela 3 Osnovne statistične količine poprečnih zimskih temperatur (T) in števila dni s snežno odejo (N) za izpopolnjen niz podatkov za 81 let.

Table 3 Basic statistical quantities of mean winter temperatures (T) and the number of days with snow cover (N) for the completed series of data for the period of 81 years.

	vsota	poprečje	standardna deviacija	varianca	minimum	maximum
T	-17,5	-0,2	1,88	3,52	-5,2	3,3
N	3 572	44,1	21,38	456,89	1	90

Večjih razlik med obema korelacijskima koeficientoma pri obeh obdelavah seveda ni.

S programom UNISTAT 1 /7/ smo za oba izpopolnjena niza izračunali še druge statistične količine in jih vnesli v tabelo 4.

Tabela 4 Nekaterne statistične količine poprečnih zimskih temperatur (T) in števila dni s snežno odejo (N) za izpopolnjen niz podatkov za 81 let.

Table 4 Some statistical quantities of mean winter temperatures (T) and the number of days with snow cover (N) for the completed series of data for the period of 81 years.

	T	N
koeficient asimetričnosti	-0,5	0,3
koeficient sploščenosti	2,7	2,4
število iteracij navzgor in navzdol	56	53
verjetnost, da je število iteracij 56 ali manj	0,77	
verjetnost, da je število iteracij 56 ali več	0,31	
dolžina najdaljše iteracije navzgor ali navzdol	5	5
verjetnost, da je dolžina najdaljše iteracije 5 ali manj	0,97	0,97
verjetnost, da je dolžina najdaljše iteracije 5 ali več	0,17	0,17
verjetnost, da je število iteracij 53 ali manj		0,40
verjetnost, da je število iteracij 53 ali več		0,60

Iz tega programa smo dobili, da je interval zaupanja za aritmetično sredino spremenljivke T pri 5% tveganju med vrednostmi -0,6 in 0,2. Če imamo torej kak drug niz poprečnih zimskih temperatur, je verjetnost 95%, da pade njegova aritmetična sredina v ta interval.

Interval zaupanja za aritmetično sredino spremenljivke N je:

$$39 \leq N \leq 49$$

Torej, če vzamemo kak drug niz dni s snežno odejo, je 95% verjetnost, da pade srednja vrednost tega niza v ta interval.

Na sliki 3a je frekvenčni histogram spremenljivke T, na sliki 4a pa spremenljivke N. Na vodoravni osi so označeni intervali - meje razredov, na navpični pa frekvence oz. število podatkov, ki padejo v dani interval. Vsak interval vključuje spodnjo mejo ustreznega razreda, zadnji interval tudi zgornjo mejo. Spodnje meje razredov so izpisane za vsak tretji interval, ki smo ga izračunali takole:

$$\text{interval} = (\text{maximum} - \text{minimum}) / k$$

kjer sta maximum in minimum največja oz. najmanjša vrednost podatkov, k pa število intervalov. Za naš primer smo vzeli število intervalov  $k = 30$ . Spodnja meja prvega razreda je najmanjša vrednost, spodnje meje naslednjih intervalov smo dobili tako, da smo prišteli dolžino intervala k spodnji meji prejšnjega intervala.

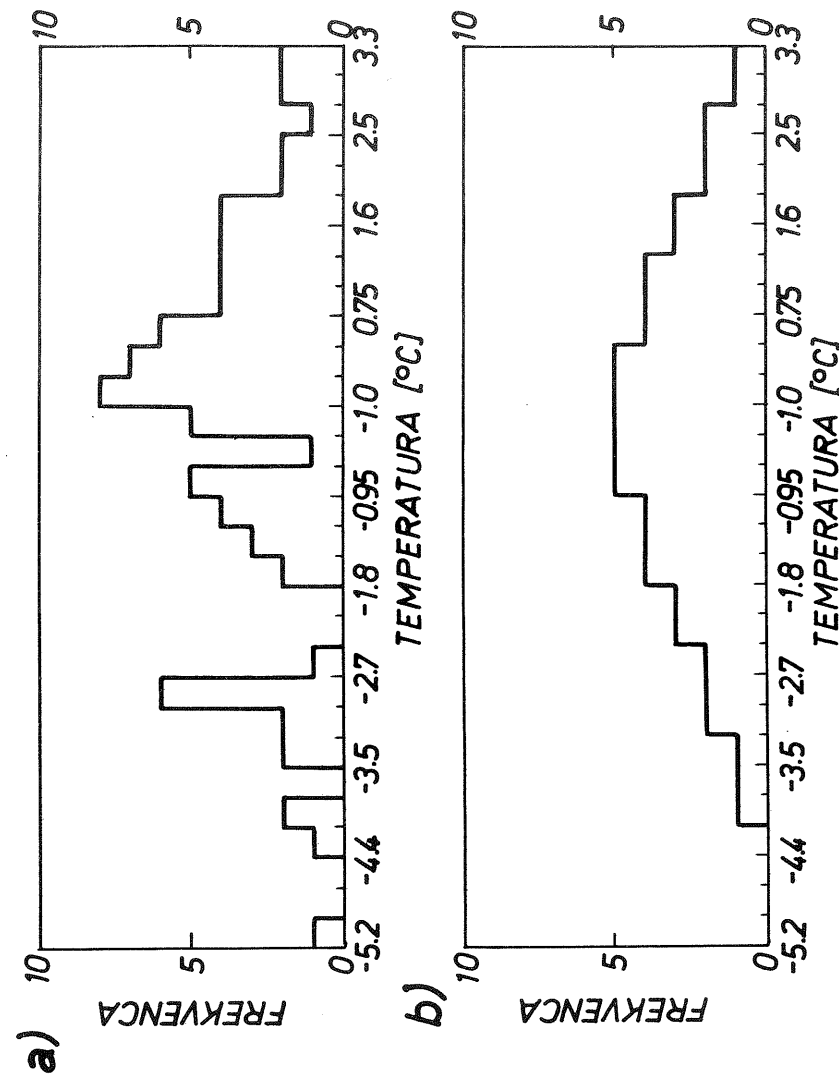
Koeficient asimetričnosti za krivuljo porazdelitve spremenljivke T je  $-0,5$  (tabela 4). Ker je ta koeficient zelo majhen, je krivulja simetrična, le nekoliko je pomaknjena proti negativnim vrednostim. Koeficient asimetričnosti spremenljivke N je  $0,4$ . Tudi ta krivulja je blizu simetriji, le za malenkost je pomaknjena proti pozitivnim vrednostim. Koeficient sploščenosti za krivuljo porazdelitve spremenljivke T je  $2,7$ . Krivulja je blizu standardni normalni porazdelitvi, za katero je vrednost tega koeficienta enaka  $3,0$ . Koeficient sploščenosti za krivuljo spremenljivke N je  $2,4$ , kar pomeni, da je porazdelitvena krivulja v sredini nekoliko višja od standardne normalne porazdelitve.

Na sliki 3b in 4b sta frekvenčna histograma z normalno porazdelitvijo spremenljivke T oz. spremenljivke N. Taka histograma bi dobili, če bi bili spremenljivki porazdeljeni normalno z enako aritmetično sredino in standardno deviacijo, kot smo ju dobili iz naravne porazdelitve.

Zanimive so tudi iteracije, t.j. naraščanje ali padanje vrednosti obeh spremenljivk pri zaporednih zimah. Največje število iteracij je 5 za obe spremenljivki in je bilo za poprečne zimske temperature med leti 1969/70 in 1974/75, za število dni s snežno odejo pa med 1947/48 in 1952/53 in torej ne sovpadajo (tabela 1 in 2). Verjetnost, da ima iteracija 5 korakov ali manj, je za obe spremenljivki 97%, da ima iteracija 5 ali več korakov pa 17%.

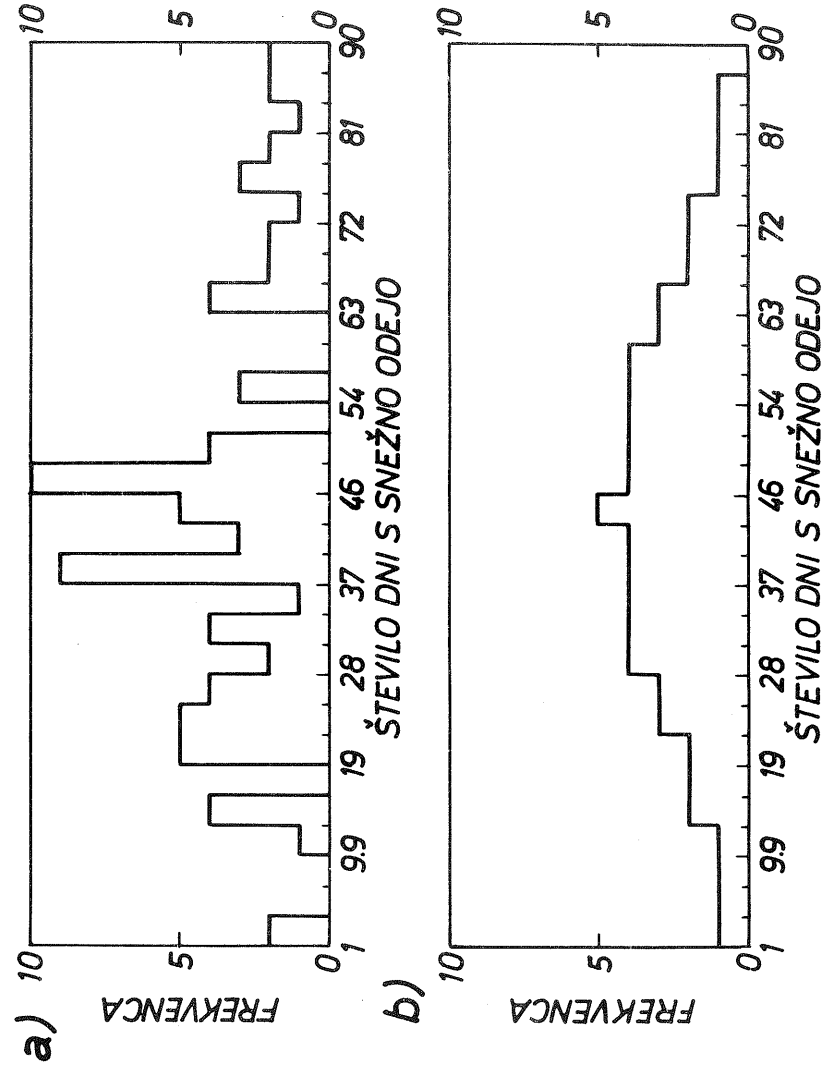
Če tvorimo interval  $2\sigma \leq \bar{T} \leq 2\sigma$ , je verjetnost 95%, da pade katerakoli poprečna zimska temperatura v ta interval:  $-4,0 \leq T \leq 3,6$ . Torej je le 5% verjetnosti, da je poprečna zimska temperatura kateregakoli leta v Ljubljani ali nižja od  $-4,0^\circ\text{C}$ , ali višja od  $3,6^\circ\text{C}$ .

Iz programa STEPREG 1 /8/ smo dobili za vsako leto število dni s snežno odejo, izračunano iz regresijske enačbe, in jih primerjali z opazovanimi vrednostmi. Dobili smo tudi razlike med obema vrednostima, razlike med obema vrednostima v procentih in standardizirane razlike, t.j. razlike, ki smo jih delili s standardno napako ocene oz. kvadratnim korenem poprečnih razlik, kar je  $14,41$ , ki smo ga tudi dobili iz tega programa. V tabeli 5 lahko razberemo vse te vrednosti.



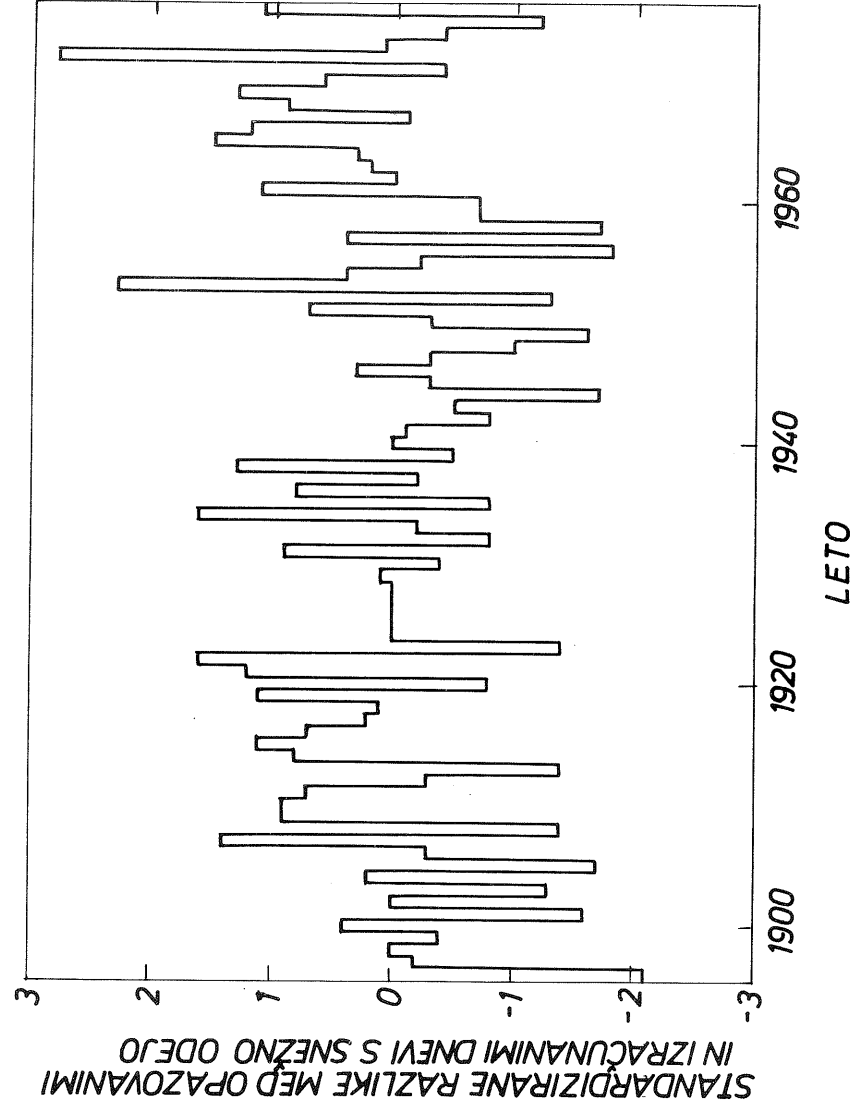
Slika 3 Frekvenčni histogram naravne in normalne porazdelitve poprečnih zimskih temperatur za 81 let z enako aritmetično sredino in standardno deviacijo.

Fig. 3 Frequency histogram of natural and normal distribution of mean winter temperatures for the period of 81 years with the equal arithmetical mean and standard deviation.



Slika 4 Frekvenčni histogram naravne in normalne porazdelitve števila dni s snežno odejo v zimskih mesecih za 81 let z enako aritmetično sredino in standardno deviacijo.

Fig. 4 Frequency histogram of natural and normal distribution of number of days with snow cover during winter months for the period of 81 years with the equal arithmetical mean and standard deviation.



Slika 5 Razlike med števili dni s snežno odejo in vrednostmi, ki smo jih dobili iz regresijske enačbe. Razlike so deljene s standardno napako ocene za 81 let.

Fig. 5 Differences between number of days with snow cover and values obtained by regression equation. The differences are divided with the standard estimation error for 81 years.

Tabela 5 Opazovane in izračunane vrednosti odvisne spremenljivke N in razlike.

Table 5 Observed and computed values of dependent variable N and residuals.

Leto	N-opazovan	N-izračunan	razlike	procentualne razlike	standardizirane razlike
1895/96	24.0	54.1	-30.1	-125.4	-2.1
1896/97	35.0	38.0	-3.0	-8.7	-0.2
1897/98	43.0	43.1	-0.1	-0.3	0.0
1898/99	20.0	26.2	-6.2	-31.1	-0.4
1899/00	42.0	36.4	5.6	13.4	0.4
1900/01	47.0	70.2	-23.2	-49.3	-1.6
1901/02	31.0	31.3	-0.3	-0.9	-0.2
1902/03	26.0	44.8	-18.8	-72.3	-1.3
1903/04	33.0	29.6	3.4	10.3	0.2
1904/05	31.0	55.0	-24.0	-77.3	-1.7
1905/06	39.0	43.1	-4.1	-10.6	-0.3
1906/07	85.0	65.1	19.9	23.4	1.4
1907/08	21.0	40.6	-19.6	-93.3	-1.4
1908/09	80.0	67.6	12.4	15.5	0.9
1909/10	44.0	31.3	12.7	28.9	0.9
1910/11	50.0	40.6	9.4	18.8	0.7
1911/12	19.0	22.8	-3.8	-20.2	-0.3
1912/13	22.0	42.3	-20.3	-92.2	-1.4
1913/14	78.0	65.9	12.1	15.5	0.8
1914/15	49.0	33.8	15.2	31.0	1.1
1915/16	28.0	18.6	9.4	33.5	0.7
1916/17	46.0	43.0	2.9	6.3	0.2
1917/18	46.0	44.0	2.0	4.3	0.1
1918/19	43.0	27.1	15.9	37.1	1.1
1919/20	3.0	14.4	-11.4	-379.4	-0.8
1920/21	46.0	28.8	17.2	37.5	1.2
1921/22	77.0	53.3	23.7	30.8	1.6
1922/23	11.0	31.3	-20.3	-184.4	-1.4
1923/24	46.0	45.7	0.3	0.8	0.0
1924/25	27.0	27.1	-0.1	-0.2	0.0
1925/26	43.0	43.1	-0.1	-0.3	0.0
1926/27	48.0	48.2	-0.2	-0.4	0.0
1927/28	42.0	42.3	-0.3	-0.7	0.0
1928/29	88.0	86.2	1.8	2.0	0.1
1929/30	24.0	30.4	-6.4	-26.8	-0.4
1930/31	50.0	37.2	12.8	25.6	0.9
1931/32	55.0	66.8	-11.8	-21.4	-0.8
1932/33	47.0	49.9	-2.9	-6.1	-0.9
1933/34	90.0	66.8	23.2	25.8	1.6

Tabela 5 (nadaljevanje)

Leto	N-opazovan	N-izračunan	razlike	procentualne razlike	standardizirane razlike
1934/35	39.0	49.9	-10.9	-27.9	-0.8
1935/36	27.0	16.1	10.9	40.5	0.8
1936/37	38.0	40.6	-2.6	-6.8	-0.2
1937/38	70.0	50.7	19.3	27.5	1.4
1938/39	28.0	34.7	-6.7	-23.8	-0.5
1939/40	76.1	76.1	-0.1	-0.1	-0.0
1940/41	65.0	66.8	-1.8	-2.7	-0.1
1941/42	64.0	76.1	-12.1	-18.9	-0.8
1942/43	37.0	44.0	-7.8	-21.1	-0.5
1943/44	14.0	38.9	-24.9	-177.8	-1.7
1944/45	47.0	51.6	-4.6	-9.7	-0.3
1945/46	38.0	33.8	4.2	11.0	0.3
1946/47	66.0	71.0	-5.0	-7.6	-0.3
1947/48	13.0	27.1	-14.1	-108.2	-1.0
1948/49	15.0	38.0	-23.0	-153.7	-1.6
1949/50	33.0	37.2	-4.2	-12.7	-0.3
1950/51	37.0	26.2	10.8	29.2	0.7
1951/52	50.0	68.5	-18.5	-37.0	-1.3
1952/53	85.0	51.6	33.4	39.3	2.3
1953/54	69.0	63.4	5.6	8.1	0.4
1954/55	21.0	23.7	-2.7	-12.8	-0.2
1955/56	27.0	52.4	-25.4	-94.1	-1.8
1956/57	45.0	39.7	5.3	11.7	0.4
1957/58	23.0	48.2	-25.2	-109.5	-1.7
1958/59	24.0	33.8	-9.0	-40.9	-0.7
1959/60	21.0	31.3	-10.3	-49.0	-0.7
1960/61	46.0	29.6	16.4	35.7	1.1
1961/62	42.0	41.0	0.6	1.4	0.0
1962/63	80.0	77.8	2.2	2.8	0.2
1963/64	69.0	65.1	3.9	5.7	0.3
1964/65	71.0	49.0	22.0	30.9	1.5
1965/66	48.0	30.4	17.6	36.6	1.2
1966/67	37.0	38.9	-1.9	-5.1	-0.1
1967/68	57.0	44.0	13.0	22.9	0.9
1968/69	75.0	56.6	18.4	24.5	1.3
1969/70	66.0	57.5	8.5	12.9	0.6
1970/71	38.0	44.0	-6.0	-15.7	-0.4
1971/72	82.0	42.3	39.7	48.5	2.8
1972/73	39.0	38.0	1.0	2.4	0.1
1973/74	15.0	21.1	-6.1	-41.0	-0.4
1974/75	1.0	18.6	-17.6	-1760.8	-1.2
1975/76	55.0	39.7	15.3	27.8	1.1

Slika 5 prikazuje standardizirane razlike, t.j. razlike dnevov s snežno odejo od vrednosti, ki smo jo dobili iz regresijske enačbe in te razlike delili s standardno napako ocene. Na histogramu lahko ločimo dve obdobji, ko je bilo v poprečju več dni s snežno odejo od izračunanih vrednosti po regresijski enačbi in dve obdobji, ko je bilo v poprečju manj dni s snežno odejo od izračunanih vrednosti. Prvo obdobje, ko je bila nagnjenost k negativnim vrednostim, je bilo približno do leta 1913; v drugem obdobju, približno do leta 1937, je bila nagnjenost k pozitivnim vrednostim; v tretjem obdobju, približno do leta 1960, je bila ponovno nagnjenost k negativnim vrednostim razlik dni s snežno odejo in v četrtem obdobju po letu 1960 k pozitivnim vrednostim. V vsakem obdobju pa se seveda javljajo tudi leta, ko je bilo manj ali več dni s snežno odejo od izračunanih vrednosti, kot je bila tendenca v tistem obdobju, ki pa jih je bilo precej manj.

#### ZAHVALA

Zahvaljujem se tov. dipl. ing. mat. Jožetu Roškarju za nasvete in izdelavo programov za to nalogo.

#### LITERATURA

- /1/ Manohin V.: Nekateri značilnosti zimskih temperatur v Ljubljani v zadnjih 115 letih - Razprave-Papers, DMS VI, Ljubljana 1965
- /2/ Pristov J., Trontelj M.: Zimski temperaturni ekstremi - Razprave-Papers, DMS XIX, Ljubljana 1975
- /3/ Furlan D.: Nekaj podatkov o sneženju in snežni odeji v Sloveniji - 10 let hidrometeorološke službe, Hidrometeorološki zavod LR Slovenije, Ljubljana 1975
- /4/ Arhiv Meteorološkega zavoda SRS, Ljubljana
- /5/ Vranič V.: Vjerojatnost i statistika - Tehnična knjiga, Zagreb 1965
- /6/ Čepar D.: Opis programa DSTAT 2 - Odsek za uporabno matematiko, Institut "Jožef Stefan", Ljubljana 1975
- /7/ Lah P.: Opis programa UNISTAT 1 - Odsek za uporabno matematiko, Institut "Jožef Stefan", Ljubljana 1973
- /8/ STATJOB - Summary, The university of Wisconsin Madison, July 1971